Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo
Ficha 1. Noções Básicas Sobre Erros

1. Determine os erros, absoluto e relativo das seguintes aproximações:

   (a) $\sqrt{\pi} \approx 1,77245$;

   (b) $\dfrac{10}{7} \approx 1,42857$;

   (c) $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,64872$;

   (d) $e \approx \dfrac{106}{39}$.

2. Que valor é mais exacto quando se usam:

   (a) $\pi \approx 3,14$ ou $e \approx 2,718$;

   (b) $\sqrt{18} \approx 4,24$ ou $\dfrac{9}{11} \approx 0,818$;

3. Verifique quantos são os dígitos significativos corretos na aproximação de x por x^*.

   (a) $x = 2,5834$ e $x^* = 2,6$;

   (b) $x = 0,9949$ e $x^* = 0,9951$;

4. Determine o limite superior do erro cometido no cálculo

   (a) $y = \ln x,\ x = 2,5 \pm 0,01$;

   (b) $y = \sin x,\ x = 3,2 \pm 0,03$;

5. Determine o valor aproximado da área e o erro absoluto de um jardim trapezial, sabendo que: $a = 5 \pm 0,01$; $b = 15 \pm 0,02$; $h = 4 \pm 0,01$.

6. Derive a fórmula de propação do erro para a função

$$f(x, y, z) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$$

7. Calcule o valor aproximado e o erro absoluto das seguintes expressões:

   (a) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + xy}$
   $x = 3,10 \pm 0,02$; $y = 2,01 \pm 0,02$;

   (b) $t = e^{-yz} + \dfrac{\cos x}{y}$, $x = 1,3 \pm 0,1$
   $y = 0,25 \pm 0,04$; $z = 1,7 \pm 3 \times 10^{-1}$;

   (c) $v = \dfrac{\pi h^2(3r - h)}{3}$, $h = 0,5$ e $r = 1$, sabendo que na extração de dados cometeu-se um erro de 10^{-2} para cada um dos dados;

   (d) $x = \dfrac{m^2 n^2}{\sqrt{k}}$, $m = 25,2 \pm 0,01$;
   $n = 10,25 \pm 0,02$; $k = 6,125 \pm 0,003$;

   (e) $y = \dfrac{(a + b)m}{(c - d)^2}$ $a = 2,225 \pm 0,001$
   $b = 10,5 \pm 0,002$; $m = 0,5 \pm 0,005$;
   $c = 10,5 \pm 0,002$; $d = 6,15 \pm 0,003$.

Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo

Ficha 2. Zeros de Funções de Variável Real

1. Usando o método gráfico, determine um intervalo que contenha uma raíz das seguintes equações:
   (a) $x^3 + x - 1 = 0$;
   (b) $e^x + x^2 + x - 2 = 0$;
   (c) $x - 1 + e^{-2x} = 0$.

2. Mostre que as seguintes equações têm pelo menos uma solução nos intervalos dados:
   (a) $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$, $[0,2; 0,3]$ e $[1,2; 1,3]$.
   (b) $2x \cos 2x - x + 2 = 0$, $[2; 3]$ e $[3; 4]$.

3. Isole analiticamente os zeros das seguintes funções:
   (a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$;
   (b) $g(x) = x \ln x - 3,2$;
   (c) $h(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$;

4. Utilizando o método da bissecção, com erro inferior a 0,1, determine o valor aproximado da raiz positiva da equação
$$e^x + x^2 + x - 2 = 0.$$

5. Calcule $\sqrt[3]{2}$ com precisão de $\epsilon = 10^{-2}$ usando o método da bissecção.

6. Mostre que existe uma única raiz de $f(x) = x^2 \ln(x) - 3$ contida no intervalo $]2, 3[$ e calcule-a, usando o método da bissecção, com precisão de $\epsilon = 10^{-2}$.

7. Utilizando o método da bissecção, com erro inferior a 10^{-4}, determine o valor aproximado do zero da função
$$f(x) = e^{-x^2} - \cos x$$
no intervalo $[1, 2]$;

8. Determine um intervalo que contenha uma única raiz do polinómio $f(x) = x^3 - x + 3$. Mostre que $\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 3}$ pode ser usada como função auxiliar no método iterativo geral e use-a para calcular essa raiz, com precisão $\epsilon = 10^{-4}$.

9. Determine pelo método iterativo geral, com erro inferior a $0,1$, o zero aproximado da função $f(x) = 1 + x + e^x$, no intervalo $[-2; -1]$.

10. Calcule $\sqrt[3]{3}$ com precisões $\epsilon = 10^{-2}$, usando o método da falsa posição.

11. Usando o método de Newton, com erro inferior a $0,001$, determine o valor aproximado da raíz da função
$$g(x) = x \ln x - 1,$$
no intervalo $[1; 2]$.

12. Usando o método de Newton, com erro inferior a $0,001$, determine o valor aproximado da raíz da função
$$g(x) = 4 \sin x - e^x,$$
no intervalo $[0; 1]$.

13. Usando o método de secante, com erro inferior a $0,01$, determine o valor aproximado da raíz da função
$$i(x) = e^{-x} - \cos x,$$
no intervalo $[1; 2]$.

14. Usando o método de secante, com erro inferior a $0,01$, determine o valor aproximado da raíz da função
$$i(x) = e^{-x^2} - \cos x,$$
no intervalo $[1; 1,5]$.

INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo
Ficha 3. Resolução de Sistemas de Equações Lineares

1. Use eliminação de Gauss para resolver o sistema

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ 10x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 12x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

2. Use eliminação de Gauss para resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + -2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

3. Use o método de Gauss e operações aritméticas com aproximação de três digitos por truncamento para resolver o sistema e compare a solução aproximada com a solução exacta $x_1 = 10,\ x_2 = 1$

$$\begin{cases} 0,03x_1 + 58,9x_2 = 59,2 \\ 5,31x_1 - 6,10x_2 = 47. \end{cases}$$

4. Mostre que Resolva cada um dos sistemas usando o método de Gauss-Jacobi, a partir do vector nulo e com precisão de $\epsilon = 0,01$ no erro relativo.

(a) $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 10 \\ 10x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

5. Resolva cada um dos sistemas usando o método de Gauss-Seidel, a partir do vector nulo e com precisão de $\epsilon = 0,01$ no erro relativo.

(a) $$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = -5 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 30 \\ 10x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo

Ficha 4. Interpolação e aproximação polinomial

1.

Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo
Ficha 5. Método de quadrados mínimos

1.

Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo
Ficha 6. Integração Numérica

1.

Análise Numérica
Curso: LEIT e LEMT
Turma: I21, I22, I23, M21 e M22
Docentes: R. Nicol's e T. Sambo
Ficha 7. Equações diferenciais ordinárias

1.